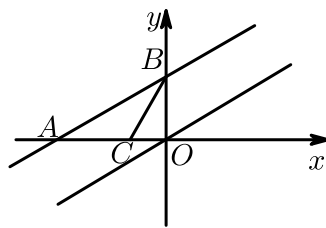


第4讲 一次函数与动点、四边形综合（练习）

一、一次函数与动点综合

1. 如图，在平面直角坐标系中， O 是坐标原点，直线 $AB: y = \frac{3}{4}x + 6$ 与 x ， y 轴分别相交于点 A 、 B ， BC 平分 $\angle ABO$ 交 x 轴于点 C 。
- (1) 求点 A 、 B 的坐标和线段 AB 的长。
- (2) 求线段 OC 的长。
- (3) 若过原点的直线 l 平行于直线 AB ，动点 P 在直线 l 上运动，当 $\angle OBP = \frac{1}{2}\angle OBA$ 时，求点 P 的坐标。



【答案】 (1) $A(-8, 0)$; $B(0, 6)$; $AB = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$ 。

(2) $OC = 3$ 。

(3) $P\left(-\frac{24}{5}, -\frac{18}{5}\right)$ 或 $P\left(\frac{24}{11}, \frac{18}{11}\right)$ 。

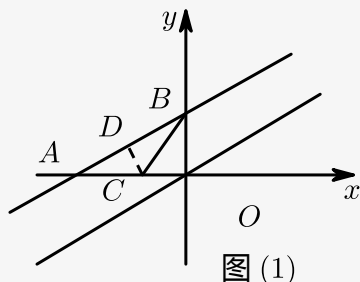
【解析】 (1) 由直线 $AB: y = \frac{3}{4}x + 6$,

令 $y = 0$ 得到 $x = -8$, 即 $A(-8, 0)$; 令 $x = 0$ 得到 $y = 6$, 即 $B(0, 6)$,

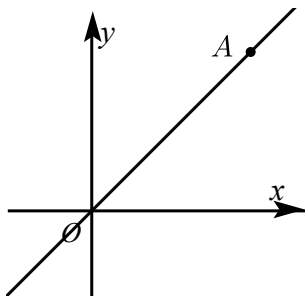
$\therefore OA = 8$, $OB = 6$,

根据勾股定理得: $AB = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$ 。

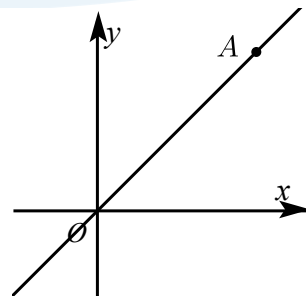
(2) 过 C 作 $CD \perp AB$ 于点 D , 如图1所示:



图(1)

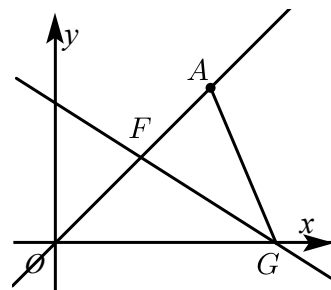


备用图



备用图

- (1) 求 k .
- (2) 点 B 为 x 轴正半轴上一动点, 点 C 为 y 轴负半轴上一动点, $OB \neq OC$, 线段 BC 的垂直平分线交直线 AO 于点 D , 交直线 BC 于点 E , 求探究线段 OD , OB , OC 的数量关系 .
- (3) 如图, G 为 x 轴正半轴上一点, 直线 $FG: y = ax + b$ 交线段 OA 于点 F , 若 $AG = FG$, $m = 3$, 求 a, b 的关系式 .



【答案】(1) $k = 1$.

(2) $OB = \sqrt{2}OD + OC$ 或 $OC = \sqrt{2}OD + OB$.

(3) $b = 3a^2 - 3a$.

【解析】(1) $\because y = kx$ 过点 $A(m, m)$, $\therefore km = m$, 且 $m \neq 0$,
 $\therefore k = 1$.

(2) 过 D 作 $DM \perp OB$ 于 M , $DN \perp OC$ 于 N , 连接 DB, DC ,

$\because D$ 在 $y = x$ 上, $\therefore DM = DN$, $OD = \sqrt{2}OM$,

$\because DE$ 垂直平分 BC , $\therefore DC = DB$,

则 $\text{Rt}\triangle DCN \cong \text{Rt}\triangle DBM$,

$\therefore BM = CM$, $OM = ON$.

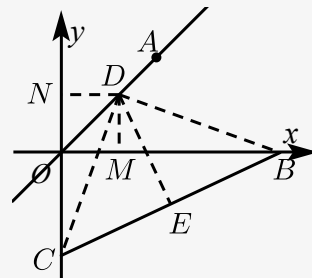
① 当 $OB > OC$ 时, 如图 .

$OB = OM + BM = OM + CN + OC = 2OM + OC$,

即 $OB = \sqrt{2}OD + OC$.

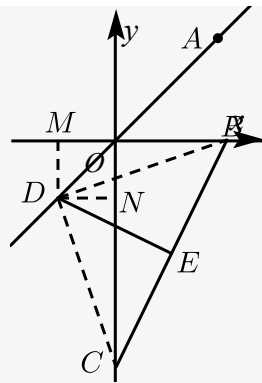
② 当 $OB < OC$ 时, 如图 .

$OC = ON + CN = ON + BM = ON + OM + OB = 2OM + OB = \sqrt{2}OD + OB$



即 $OC = \sqrt{2}OD + OB$.

综合得: $OB = \sqrt{2}OD + OC$ 或 $OC = \sqrt{2}OD + OB$.



(3) 作 $AP \perp OG$ 于点 P , 过 F 作 $FQ \perp OG$, 设 $F(n, n)$,

由题意知: $AP = PO = 3$, $FG = OQ = n$, $\angle AOG = \angle OAP = 45^\circ$,

$\therefore AG = FG$, $\therefore \angle AFG = \angle FAG$,

$\therefore \angle AFG = \angle AOG + \angle OGF$, $\angle FAG = \angle OAP + \angle PAG$,

$\therefore \angle OGF = \angle PAG$,

又 $\therefore \angle FQG = \angle APG$, $AG = FG$,

$\therefore \triangle FQG \cong \triangle GPA$ (AAS),

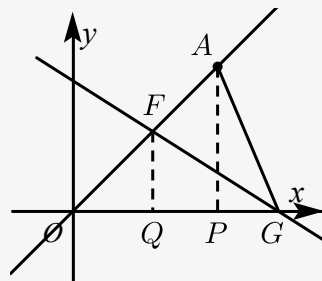
$\therefore PG = FQ = n$, 即 $G(n+3, 0)$.

$\therefore F(n, n)$ 和 $G(n+3, 0)$ 在 $y = ax + b$ 上,

$$\therefore \begin{cases} an + b = n \\ a(n+3) + b = 0 \end{cases}$$

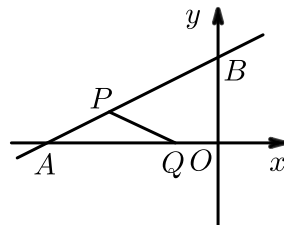
解得 $n = 3a$,

$\therefore b = 3a^2 - 3a$.



【标注】【知识点】线段和差-不需要分类讨论

3. 如图, 在平面直角坐标系中, 直线 $y = \frac{3}{4}x + 6$ 与 x 轴交于点 A , 与 y 轴交于点 B , 点 P 从点 A 出发, 沿折线 $AB - BO$ 向终点 O 运动, 在 AB 上以每秒 5 个单位长度的速度匀速运动, 在 BO 上以每秒 3 个单位长度的速度匀速运动, 点 Q 从点 O 出发, 沿 OA 方向以每秒 $\frac{4}{3}$ 个单位长度的速度匀速运动, P 、 Q 两点同时出发, 当点 P 停止运动时, 点 Q 也随之停止运动, 设点 P 运动时间为 t 秒.



- (1) 求点 A 和点 B 的坐标.
- (2) 连结点 PQ , 当 $PQ \perp OA$ 时, 求 t 的值.
- (3) 以线段 PQ 为边的正方形面积为 S , 请直接写出 S 与 t 之间的函数关系式及自变量 t 的取值范围.

【答案】(1) $A(-8, 0)$, $B(0, 6)$.

(2) $t = \frac{3}{2}$.

(3)
$$S = \begin{cases} \frac{337}{9}t^2 - \frac{256}{3}t + 144 & (0 \leq t \leq 2) \\ \frac{97}{9}t^2 - 72t + 144 & (2 < t \leq 4) \end{cases}.$$

【解析】(1) 对于一次函数 $y = \frac{3}{4}x + 6$, 令 $x = 0$, 得到 $y = 6$, 令 $y = 0$, 得到 $x = -8$,
 $\therefore A(-8, 0)$, $B(0, 6)$.

(2) 在 $\text{Rt}\triangle AOB$ 中, $AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$,

$\therefore PQ \perp OA$,

$\therefore$ 点 P 在线段 AB 上, $AP = 5t$, $OQ = \frac{4}{3}t$,

$\therefore PQ \parallel OB$,

$\therefore \frac{AP}{AB} = \frac{AQ}{AO}$,

$\therefore \frac{5t}{10} = \frac{8 - \frac{4}{3}t}{8}$,

解得 $t = \frac{3}{2}$.

(3) ① 当点 P 在线段 AB 上时, 作 $PH \perp OA$ 于 H .

则有 $S = PQ^2 = PH^2 + QH^2$,

$\therefore PH = 3t$, $QH = \left| 8 - 4t - \frac{4}{3}t \right|$,

$\therefore S = 9t^2 + \left(8 - \frac{16}{3}t \right)^2 = \frac{337}{9}t^2 - \frac{256}{3}t + 64$ (

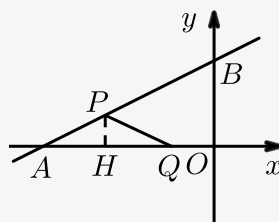
$0 \leq t \leq 2$).

② 当点 P 在线段 OB 上时,

$S = PQ^2 = OP^2 + OQ^2 = [16 - 10 - 3(t - 2)]^2 + \left(\frac{4}{3}t \right)^2 = \frac{97}{9}t^2 - 72t + 144$

$(2 < t \leq 4)$.

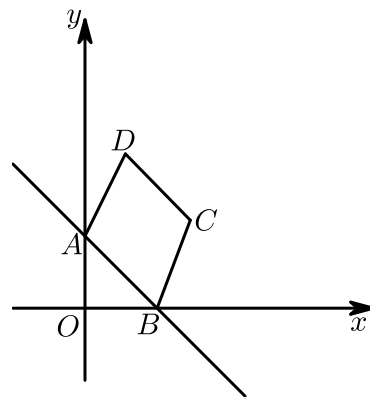
综上所述, $S = \begin{cases} \frac{337}{9}t^2 - \frac{256}{3}t + 144 & (0 \leq t \leq 2) \\ \frac{97}{9}t^2 - 72t + 144 & (2 < t \leq 4) \end{cases}.$



【标注】【知识点】一次函数与动点问题

二、一次函数与四边形存在性

如图，在平面直角坐标系 xOy 中，直线 $y = -\frac{2\sqrt{3}}{3}x + 4$ 交 y 轴于点 A ，交 x 轴于点 B ，以线段 AB 为边作菱形 $ABCD$ （点 C 、 D 在第一象限），且点 D 的纵坐标为9．



- (1) 求点 A 、点 B 的坐标．
- (2) 求直线 DC 的解析式．
- (3) 除点 C 外，在平面直角坐标系 xOy 中是否还存在点 P ，使点 A 、 B 、 D 、 P 组成的四边形是平行四边形？若存在，请直接写出点 P 的坐标．若不存在，请说明理由．

【答案】 (1) $A(0, 4)$ ， $B(2\sqrt{3}, 0)$ ．

(2) $y = -\frac{2\sqrt{3}}{3}x + 11$ ．

(3) 存在， $P_1(-\sqrt{3}, 13)$ ， $P_2(\sqrt{3}, -5)$ ．

【解析】 (1) 易解得 $A(0, 4)$ ， $B(2\sqrt{3}, 0)$ ．

(2) 过点 D 作 $DE \perp y$ 轴，垂足为 E ，

$\because$ 点 D 的纵坐标为9， $OA = 4$ ，

$\therefore AE = 5$ ，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，

$\therefore AD = AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = \sqrt{4^2 + (2\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{7} \therefore DE = \sqrt{3}$ ，

$\therefore D(\sqrt{3}, 9)$ ，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形， $\therefore DC \parallel AB$ ，

$\therefore$ 设直线 DC 的解析式为 $y = -\frac{2\sqrt{3}}{3}x + b$ ，

$\because$ 直线 DC 过点 $D(\sqrt{3}, 9)$ ， $\therefore b = 11$ ，

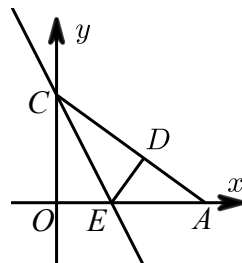
$\therefore$ 直线 DC 的解析式为 $y = -\frac{2\sqrt{3}}{3}x + 11$ ．

(3) (3) 存在．

由 $DP \parallel AB$ ， $AP \parallel BD$ 易解得，

$P_1(-\sqrt{3}, 13)$ ， $P_2(\sqrt{3}, -5)$ ．

5. 如图， $\text{Rt}\triangle OAC$ 是一张放在平面直角坐标系中的直角三角形纸片，点 O 与原点重合，点 A 在 x 轴上，点 C 在 y 轴上， $OC = \sqrt{3}$ ， $\angle CAO = 30^\circ$ ，将 $\text{Rt}\triangle OAC$ 折叠，使 OC 边落在 AC 边上，点 O 与点 D 重合，折痕为 CE 。



- (1) 求折痕 CE 所在直线的解析式。
- (2) 求点 D 的坐标。
- (3) 设点 M 为直线 CE 上的一点，过点 M 作 AC 的平行线，交 y 轴于点 N ，是否存在这样的点 M ，使得以 M 、 N 、 D 、 C 为顶点的四边形是平行四边形？若存在，请求出符合条件的点 M 的坐标；若不存在，请说明理由。

【答案】(1) $y = -\sqrt{3}x + \sqrt{3}$ 。

(2) $D\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 。

(3) 有两个符合条件的点，

在第四象限内， $M_1\left(\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 。

在第二象限内， $M_2\left(-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\sqrt{3}\right)$ 。

【解析】(1) $\because \angle CAO = 30^\circ$,

$$\therefore AC = 2OC = 2\sqrt{3}, AO = \sqrt{3}OC = 3,$$

$$\text{由折叠知: } OC = CD = \sqrt{3}, OE = DE,$$

$$\text{设 } OE = DE = x, AD = AC - CD = \sqrt{3},$$

$$AE = 3 - x,$$

$$\text{在Rt}\triangle ADE\text{中: } (3 - x)^2 = x^2 + (\sqrt{3})^2,$$

$$\text{解得: } x = 1,$$

$$\text{故 } E(1, 0),$$

$$\text{设 } CE\text{解析式为 } y = kx + b (k \neq 0),$$

$$\text{由题意得: } \begin{cases} 0 = k + b \\ \sqrt{3} = 0 + b \end{cases}, \text{解得: } \begin{cases} k = -\sqrt{3} \\ b = \sqrt{3} \end{cases},$$

故 CE 解析式： $y = -\sqrt{3}x + \sqrt{3}$.

(2) 作 $DH \perp AE$ 交 AE 于 H ,

$$DH = \frac{AD \cdot DE}{AE} = \frac{\sqrt{3} \cdot 1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore EH = \sqrt{OE^2 - DH^2} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore OH = OE + EH = \frac{3}{2},$$

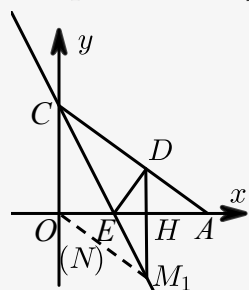
$$\text{故 } D\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

(3) 有两个符合条件的点,

①此点在第四象限,

延长 DH 交直线 CE 于 M_1 ,

连 M_1O , 则有 $DM_1 \parallel y$ 轴,



设 $M_1\left(\frac{3}{2}, y_1\right)$ 在 CE 上,

$$\text{故 } y_1 = -\sqrt{3} \cdot \frac{3}{2} + \sqrt{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore DM_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} = CO,$$

$$\therefore CO \parallel DM_1,$$

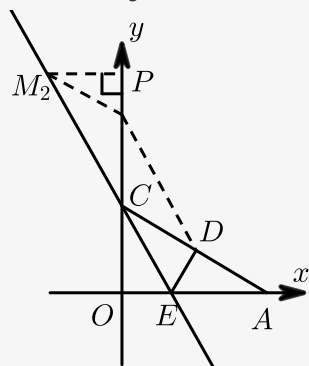
$\therefore$ 四边形 DM_1DC 为平行四边形,

$$M_1 \text{ 满足条件 } M_1\left(\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

②此点在第二象限内,

由题知 $M_2N = CO = \sqrt{3}$, $\angle M_2N = \angle OCE = 30^\circ$,

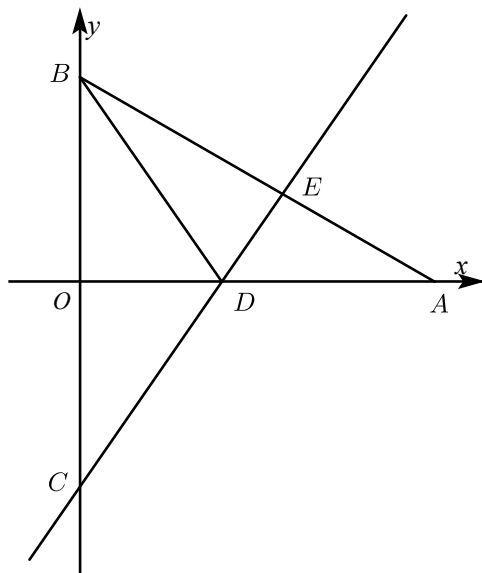
作 $M_2H \perp y$ 轴于 P 点,



$$\begin{aligned}
&\because MN \parallel CD, \\
&\therefore \angle CM_2N = 180^\circ - \angle M_2CD = 30^\circ, \\
&\therefore \angle M_2Ny = CN = \sqrt{3}, \\
&\therefore \angle M_2Ny = 30^\circ + 30^\circ = 60^\circ, \\
&\therefore \angle M_2P = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot M_2N = \frac{3}{2}, PN = \frac{1}{2} M_2N = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\
&\therefore OP = OC + CN + PN = \frac{5}{2}\sqrt{3}, \\
&\therefore M_2\left(-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\sqrt{3}\right).
\end{aligned}$$

【标注】【知识点】一次函数与平行四边形

6. 如图， A ， B 分别在 x 轴与 y 轴上， $AB = 12$ ， $\angle OAB = 30^\circ$ ，将 $\triangle OAB$ 沿直线 ED 对折，使点 A 与点 B 重合，直线 ED 分别交 y 轴、 x 轴和 AB 于点 C 、点 D 和点 E 。



- (1) OA 的长为 _____ .
- (2) 求直线 CD 的解析式 .
- (3) 点 P 为直线 CD 上一点，平面内存在点 Q ，使以 O ， E ， P ， Q 为顶点的四边形为菱形，请直接写出点 Q 的坐标 .

【答案】(1) $6\sqrt{3}$

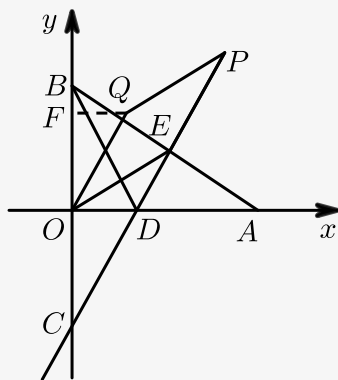
(2) $y = \sqrt{3}x - 6$.

(3) 点 Q 的坐标可为 $(3, 3\sqrt{3})$ ， $(\sqrt{3}, 3)$ ， $(-3, -3\sqrt{3})$ ， $(3\sqrt{3}, -3)$.

【解析】(1) 略 .

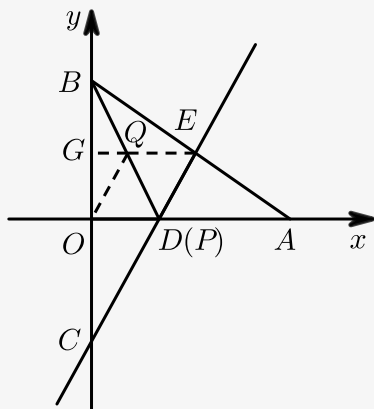
(2) 略 .

(3) ①如图，当四边形 $OEPQ$ 是菱形时，过 Q 作 $QF \perp y$ 轴于 F ，



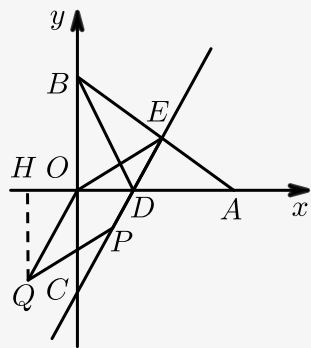
此时， $\angle QOD = \angle EDA = 60^\circ$ ，
 $\therefore \angle QOF = 30^\circ$ ，又 $\because OQ = OE = \frac{1}{2}AB = 6$ ，
 $\therefore QF = 3$ ， $OF = 3\sqrt{3}$ ，
 $\therefore Q(3, 3\sqrt{3})$ ；

②如图，当四边形 $OPEQ$ 是菱形时，点 Q 在 BD 上，点 P 与点 D 重合时，过 Q 作 $QG \perp y$ 轴于 G ，



此时， $\angle QOD = \angle EDA = 60^\circ$ ，
 $\therefore \angle QOG = 30^\circ$ ，
 又 $\because OQ = OP = 2\sqrt{3}$ ，
 $\therefore QG = \sqrt{3}$ ， $OG = 3$ ，
 $\therefore Q(\sqrt{3}, 3)$ ；

③如图，当四边形 $OEPQ$ 是菱形时，过 Q 作 $QH \perp x$ 轴于 H ，



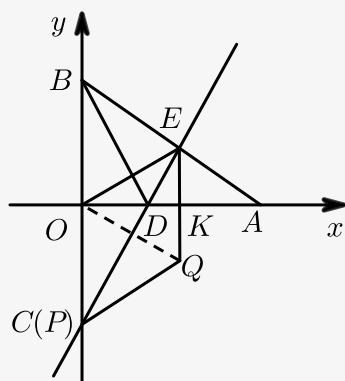
此时, $\angle QOH = \angle CDO = 60^\circ$,

又 $\because OQ = OE = 6$,

$\therefore OH = 3, QH = 3\sqrt{3}$,

$\therefore Q(-3, -3\sqrt{3})$;

④如图, 当四边形 $OEQP$ 是菱形时, 点 P 与点 C 重合, 连接 OQ ,



由 $\angle OPQ = 2\angle OPD = 60^\circ$, $OP = QP$, 可得 $\triangle OPQ$ 是等边三角形,

$\therefore OQ = OP = 6$, $\angle AOQ = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$,

又 $\because QE \perp AO$ 于 K ,

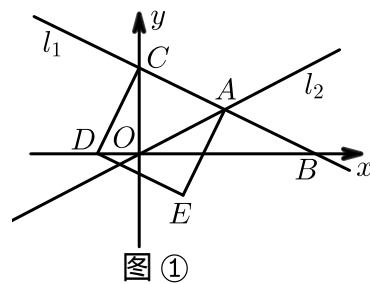
$\therefore QK = \frac{1}{2}OQ = 3, OK = 3\sqrt{3}$,

$\therefore Q(3\sqrt{3}, -3)$.

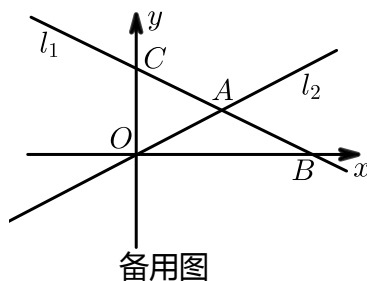
综上所述, 点 Q 的坐标为 $(3, 3\sqrt{3})$, $(\sqrt{3}, 3)$, $(-3, -3\sqrt{3})$, $(3\sqrt{3}, -3)$.

【标注】【知识点】一次函数与动点问题

7. 如图①, 在平面直角坐标系中, 直线 $l_1: y = -\frac{1}{2}x + 6$ 分别与 x 轴、 y 轴交于点 B 、 C , 且与直线 $l_2: y = \frac{1}{2}x$ 交于点 A , 以线段 AC 为边在直线 l_1 的下方作正方形 $ACDE$, 此时点 D 恰好落在 x 轴上.



- (1) 求出 A, B, C 三点的坐标 .
- (2) 求直线 CD 的函数表达式 .
- (3) 在 (2) 的条件下, 点 P 是射线 CD 上的一个动点, 在平面内是否存在点 Q , 使得以 O, C, P, Q 为顶点的四边形是菱形? 若存在, 直接写出点 P 的坐标; 若不存在, 请说明理由 .



【答案】 (1) $(6, 3); (12, 0); (0, 6)$.

(2) $y = 2x + 6$.

(3) 存在, $(6, 6)$ 或 $(-3, 3)$ 或 $(3\sqrt{2}, -3\sqrt{2})$.

【解析】 (1) 直线 $l_1: y = -\frac{1}{2}x + 6$,

当 $x = 0$ 时, $y = 6$; 当 $y = 0$ 时, $x = 12$,

$\therefore B(12, 0), C(0, 6)$,

$$\text{解方程组: } \begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + 6 \\ y = \frac{1}{2}x \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} x = 6 \\ y = 3 \end{cases} ,$$

$\therefore A(6, 3)$.

故答案为: $(6, 3); (12, 0); (0, 6)$.

(2) $\because A(6, 3), C(0, 6)$,

$$\therefore AC = \sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{45} = CD ,$$

$$OD = \sqrt{\sqrt{45}^2 - 6^2} = 3 ,$$

$\therefore D(-3, 0)$,

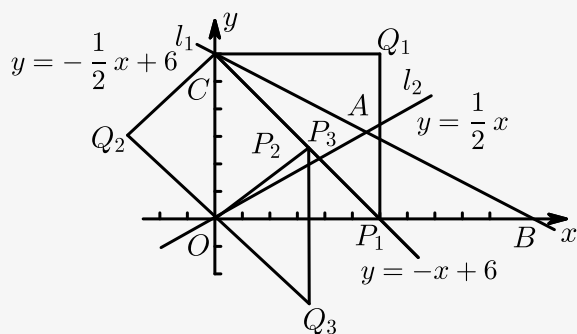
设 CD 的函数表达式为 $y = kx + b$,

$$\text{将 } C(0, 6), D(-3, 0) \text{ 代入 } \begin{cases} 6 = b \\ 0 = -3k + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = 2 \\ b = 6 \end{cases} ,$$

$\therefore$ 直线 CD 的函数表达式为 $y = 2x + 6$.

(3) 存在点 Q ，使以 O 、 C 、 P 、 Q 为顶点的四边形是菱形，

如图所示，分三种情况考虑：



①当四边形 OP_1Q_1C 为菱形时，由 $\angle COP_1 = 90^\circ$ ，

得到四边形 OP_1Q_1C 为正方形，

此时 $Q_1P_1 = OP_1 = OC = 6$ ，即 $Q_1(6, 6)$ ；

②当四边形 OP_2CQ_2 为菱形时，由 C 坐标为 $(0, 6)$ ，

得到 Q_2 纵坐标为 3 ，

把 $y = 3$ 代入直线 OQ_2 解析式 $y = -x$ 中，得： $x = -3$ ，

此时 $Q_2(-3, 3)$ ；

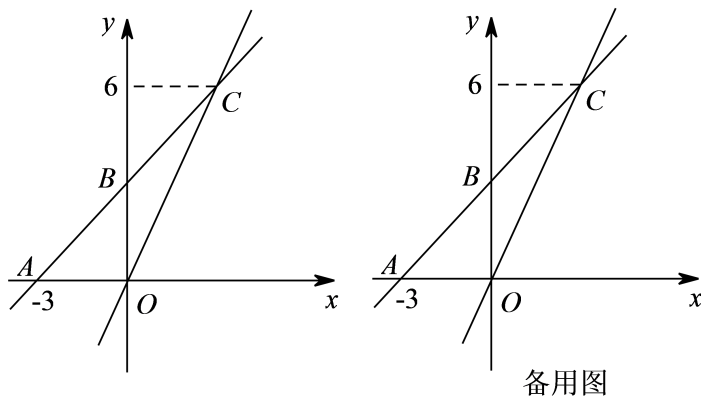
③当四边形 OQ_3P_3C 为菱形时，则有 $OQ_3 = OC = CP_3 = P_3Q_3 = 6$ ，

此时 $Q_3(3\sqrt{2}, -3\sqrt{2})$ ，

综上，点 Q 的坐标是 $(6, 6)$ 或 $(-3, 3)$ 或 $(3\sqrt{2}, -3\sqrt{2})$ 。

【标注】【知识点】一次函数与平行四边形

8. 如图，在平面直角坐标系中，一次函数 $y = mx + n (m \neq 0)$ 的图象与 x 轴交于点 $A(-3, 0)$ ，与 y 轴交于点 B ，且与正比例函数 $y = 2x$ 的图象交于点 $C(3, 6)$ 。



(1) 求一次函数 $y = mx + n$ 的解析式。

(2) 点 P 在 x 轴上，当 $PB + PC$ 最小时，求出点 P 的坐标。

(3)

若点 E 是直线 AC 上一点,点 F 是平面内一点,以 O 、 C 、 E 、 F 四点为顶点的四边形是矩形,请直接写出点 F 的坐标.

【答案】 (1) $y = x + 3$.

(2) $P(1, 0)$.

(3) $(1, 7)$ 或 $(\frac{9}{2}, \frac{9}{2})$.

【解析】 (1) $\because$ 一次函数 $y = mx + n (m \neq 0)$ 的图象经过点 $A(-3, 0)$, 点 $C(3, 6)$,

$$\therefore \begin{cases} -3m + n = 0 \\ 3m + n = 6 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} m = 1 \\ n = 3 \end{cases},$$

$\therefore$ 一次函数的解析式为 $y = x + 3$.

(2) 如图, 作点 B 关于 x 轴的对称点 B' , 连接 CB' 交 x 轴于 P , 此时 $PB + PC$ 的值最小.

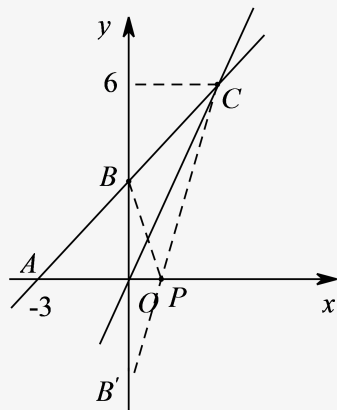
$\because B(0, 3), C(3, 6)$

$\therefore B'(0, -3),$

$\therefore$ 直线 CB' 的解析式为 $y = 3x - 3,$

令 $y = 0$, 得到 $x = 1,$

$\therefore P(1, 0).$



(3) 如图,

①当 OC 为边时, 四边形 $OCFE$ 是矩形, 此时

$EO \perp OC,$

$\therefore$ 直线 OC 的解析式为 $y = 2x,$

$\therefore$ 直线 OE 的解析式为 $y = -\frac{1}{2}x,$

$$\text{由} \begin{cases} y = -\frac{1}{2}x \\ y = x + 3 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases},$$

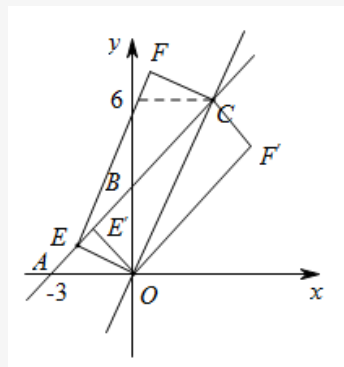
$\therefore E(-2, 1),$

$\therefore EO = CF, OE \parallel CF,$

$\therefore F(1, 7).$

②当 OC 为对角线时, 四边形 $OE'CF'$ 是矩形, 此时 $OE' \perp AC,$

$\therefore$ 直线 OE' 的解析式为 $y = -x,$



$$\text{由} \begin{cases} y = -x \\ y = x + 3 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} x = -\frac{3}{2} \\ y = \frac{3}{2} \end{cases},$$

$$\therefore E'(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}),$$

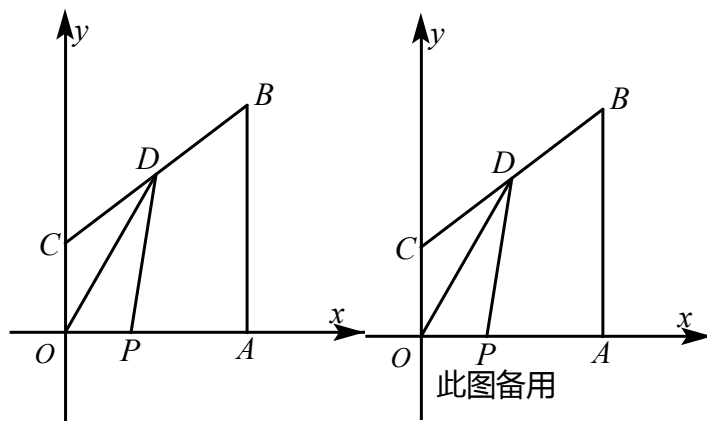
$$\therefore OE' = CF', OE' \parallel CF',$$

$$\therefore F'(\frac{9}{2}, \frac{9}{2}),$$

综上所述, 满足条件的点 F 的坐标为 $(1, 7)$ 或 $(\frac{9}{2}, \frac{9}{2})$.

【标注】【知识点】一次函数与平行四边形

9. 已知: 如图, 在直角梯形 $COAB$ 中, $OC \parallel AB$, 以 O 为原点建立平面直角坐标系, A 、 B 、 C 三点的坐标分别为 $A(8, 0)$, $B(8, 10)$, $C(0, 4)$, 点 D 为线段 BC 的中点, 动点 P 从点 O 出发, 以每秒 1 个单位的速度, 沿折线 $OABD$ 的路线移动, 移动的时间为 t 秒.



- (1) 求直线 BC 的解析式.
- (2) 若动点 P 在线段 OA 上移动, t 为何值时, 四边形 $OPDC$ 的面积是梯形 $COAB$ 面积的 $\frac{2}{7}$?
- (3) 动点 P 从点 O 出发, 沿折线 $OABD$ 的路线移动过程中, 设 $\triangle OPD$ 的面积为 S , 请直接写出 S 与 t 的函数关系式, 并指出自变量 t 的取值范围;
- (4) 当动点 P 在线段 AB 上移动时, 能否在线段 OA 上找到一点 Q , 使四边形 $CQPD$ 为矩形? 请求出此时动点 P 的坐标; 若不能, 请说明理由.

【答案】 (1) 直线 BC 的解析式为 $y = \frac{3}{4}x + 4$.

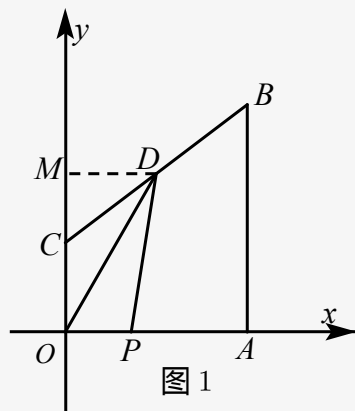
$$(2) t = \frac{16}{7}.$$

$$(3) \begin{cases} S = \frac{7}{2}t, & 0 < t \leq 8 \\ S = -2t + 44, & 8 < t \leq 18 \\ S = -\frac{8}{5}t + \frac{184}{5}, & 18 < t < 23 \end{cases}$$

(4) 不能成为矩形, 理由见解析.

【解析】(1) 略.

(2) 如图1, 过点 D 作 $DM \perp y$ 轴, 垂足为 M .



在 $\text{Rt}\triangle CDM$ 中, $CD = \frac{1}{2}CB = 5$, $DM = 4$, $CM = 3$.

所以 $S_{\text{梯形}OPDC} = S_{\triangle OCD} + S_{\triangle OPD} = \frac{1}{2} \times 4 \times 4 + \frac{1}{2} \times 7t = \frac{7}{2}t + 8$.

梯形 $COAB$ 的面积 $S_{\text{梯形}COAB} = \frac{1}{2}(4 + 10) \times 8 = 56$.

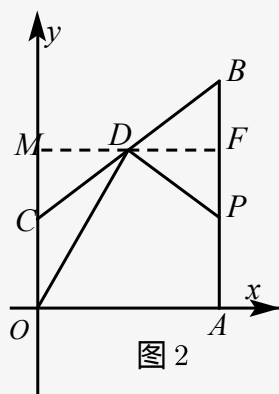
解方程 $\frac{7}{2}t + 8 = \frac{2}{7} \times 56$, 解得 $t = \frac{16}{7}$.

因此, 当 $t = \frac{16}{7}$ 时, 四边形 $OPDC$ 的面积是梯形 $COAB$ 的面积的 $\frac{2}{7}$.

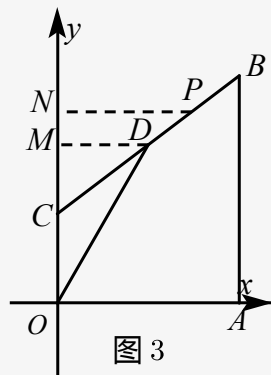
故答案为: $t = \frac{16}{7}$

(3) 如图1, ① 当 P 在线段 OA 上时, $0 < t \leq 8$, $S = \frac{7}{2}t$;

② 如图2, 当 P 在线段 AB 上时, $8 < t \leq 18$, $S = -2t + 44$;



③ 如图3, 当 P 在线段 BD 上时, $18 < t < 23$, $S = -\frac{8}{5}t + \frac{184}{5}$.

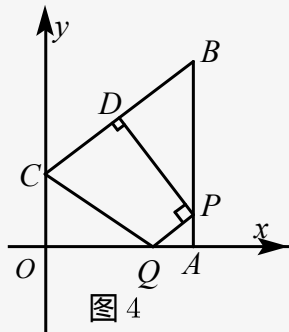


故答案为：
$$\begin{cases} S = \frac{7}{2}t, & 0 < t \leq 8 \\ S = -2t + 44, & 8 < t \leq 18 \\ S = -\frac{8}{5}t + \frac{184}{5}, & 18 < t < 23 \end{cases}$$

(4) 四边形 $CQPD$ 不可能成为矩形 . 说理如下 :

如图4, 当 $PD \perp CD$ 时, 作 $PQ \perp PD$ 交 x 轴于 Q .

在 $\text{Rt}\triangle BDP$ 中, $BD = 5$, $BP = \frac{5}{3}BD = \frac{25}{3}$.



在 $\text{Rt}\triangle APQ$ 中, $AP = \frac{5}{3}$, $PQ = \frac{5}{3}AP = \frac{25}{9}$.

所以 $PQ \neq CD$, 因此四边形 $CQPD$ 不是矩形 .

【标注】【知识点】一次函数与面积；一次函数与动点问题